Métropole 19 juin 2024 – Sujet Jour 1

Exercice 1 (4 points)

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 5xe^{-x}$.
On note C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

Affirmation 1 :
L'axe des abscisses est une asymptote horizontale à la courbe C_f.

1.) Sur $\mathbb{R}$ $f(x) = 5xe^{-x}$

Affirmation 1 : on cherche les limites de $f(x)$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

en $-\infty$: $\lim\limits_{x \to -\infty} 5x = -\infty$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} -x = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} e^X = +\infty$; par composition $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$

par produit $\lim\limits_{x \to -\infty} 5xe^{-x} = -\infty$.

Donc pas d'asymptote en $-\infty$.

en $+\infty$: $\lim\limits_{x \to +\infty} 5x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$ F.I. du type $\infty \times 0$.

$$f(x) = 5xe^{-x} = \frac{5x}{e^x} = 5\left(\frac{x}{e^x}\right).$$

D'après les croissances comparées $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

par inverse $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

Donc la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ au voisinage de $+\infty$

$\boxed{\text{L'axe des abscisses est bien une asymptote horizontale à la courbe } \mathcal{C}_f}$

Affirmation 2 :
La fonction f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(E) : y' + y = 5e^{-x}$.

Affirmation 2 : la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

f est de la forme $u \times v$ avec

$u(x) = 5x$ $\quad$ $v(x) = e^{-x}$

$u'(x) = 5$ $\quad$ $v'(x) = -e^{-x}$

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 5e^{-x} - 5xe^{-x}$

Calculons $f' + f$.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) + f(x) = 5e^{-x} - 5xe^{-x} + 5xe^{-x}$

$= 5e^{-x}$

donc f vérifie $f' + f = 5e^{-x}$

$\boxed{\text{f est bien solution sur } \mathbb{R} \text{ de l'équation différentielle } (E) : y' + y = 5e^{-x}}$

2. On considère les suites (u_n), (v_n) et (w_n), telles que, pour tout entier naturel n :

$$u_n \leq v_n \leq w_n.$$

De plus, la suite (u_n) converge vers -1 et la suite (w_n) converge vers 1.

Affirmation 3 :
La suite (v_n) converge vers un nombre réel l appartenant à l'intervalle $[-1; 1]$.

2.) $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq v_n \leq w_n$

Affirmation 3 : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -1$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = 1$

On ne peut pas conclure que la suite (v_n) est convergente.

Contre exemple : soit $v_n = (-1)^n$. $u_n = -1$ et $w_n = 1$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad -1 \leq v_n \leq 1$. et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -1$ $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = 1$

et v_n n'a pas de limite en $+\infty$.

$\boxed{\text{L'affirmation 3 est fausse.}}$

On suppose de plus que la suite (u_n) est croissante et que la suite (w_n) est décroissante.

Affirmation 4 :

Pour tout entier naturel n, on a alors : $u_0 \leq v_n \leq w_0$.

Affirmation 4 : (u_n) est croissante donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n \geq u_0$.
(w_n) est décroissante donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $w_n \leq w_0$.

On a donc

$\forall n \in \mathbb{N}$ $u_0 \leq u_n \leq v_n \leq w_n \leq w_0$

D'où $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad u_0 \leq v_n \leq w_0}$

Exercice 2 (5 points)

Une agence de marketing a étudié la satisfaction des clients concernant le service clientèle à l'occasion de l'achat d'un téléviseur. Ces achats ont été réalisés soit sur internet, soit dans une chaîne de magasins d'électroménager, soit dans une enseigne de grandes surfaces.

Les achats sur internet représentent 60 % des ventes, les achats en magasin d'électroménager 30 % des ventes et ceux en grandes surfaces 10 % des ventes.

Une enquête montre que la proportion des clients satisfaits du service clientèle est de :

- 75 % pour les clients sur internet ;
- 90 % pour les clients en magasin d'électroménager ;
- 80 % pour les clients en grande surface.

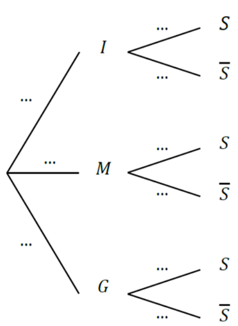
On choisit au hasard un client ayant acheté le modèle de téléviseur concerné.

On définit les événements suivants :

- I : « le client a effectué son achat sur internet » ;
- M : « le client a effectué son achat en magasin d'électroménager » ;
- G : « le client a effectué son achat en grande surface » ;
- S : « le client est satisfait du service clientèle ».

Si A est un événement quelconque, on notera $\bar{A}$ son événement contraire et $P(A)$ sa probabilité.

1. Reproduire et compléter l'arbre ci-contre.



Soient les évènements et leur probabilité d'après l'énoncé

I "le client a effectué son achat sur internet" $p(I) = 60\%$

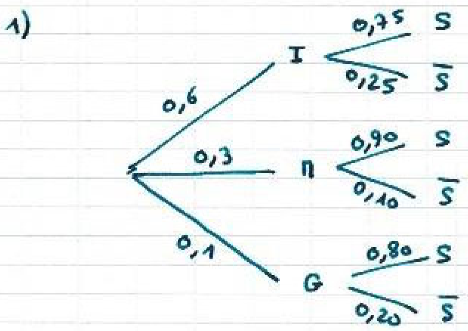
M "le client a effectué son achat en magasin d'électroménager" $p(M) = 30\%$

G "le client a effectué son achat en grande surface" $p(G) = 10\%$.

S "le client est satisfait du service clientèle"

$P_I(S) = 75\%$ $\quad P_M(S) = 90\%$ $\quad P_G(S) = 80\%$

1)



$P_I(\bar{S}) = 1 - P_I(S)$

$P_M(\bar{S}) = 1 - P_M(S)$

$P_G(\bar{S}) = 1 - P_G(S)$

2. Calculer la probabilité que le client ait réalisé son achat sur internet et soit satisfait du service clientèle.

2) on cherche $P(I \cap S)$

D'après la formule des probas conditionnelles $(P(I) \neq 0)$

$$P(I \cap S) = P(I) \times P_I(S)$$
$$= 0,6 \times 0,75$$
$$\boxed{P(I \cap S) = 0,45}$$

3. Démontrer que $P(S) = 0,8$.

3) I, M et G forment une partition de l'univers
D'après la loi des probabilités totales, on a

$$P(S) = P(I \cap S) + P(M \cap S) + P(G \cap S)$$
$$= P(I) \times P_I(S) + P(M) \times P_M(S) + P(G) \times P_G(S)$$
$$= 0,6 \times 0,75 + 0,3 \times 0,90 + 0,1 \times 0,8$$
$$\boxed{P(S) = 0,8}$$

4. Un client est satisfait du service clientèle. Quelle est la probabilité qu'il ait effectué son achat sur internet ?
On donnera un résultat arrondi à 10^{-3} près.

4) On cherche $P_S(I)$

D'après la formule des probabilités conditionnelles, avec $P(I) \neq 0$

$$P_S(I) = \frac{P(S \cap I)}{P(S)} = \frac{0,45}{0,8} = \frac{45}{80} = \frac{9}{16} = 0,5625$$

$$\boxed{P_S(I) \approx 0,563}$$

5. Pour réaliser l'étude, l'agence doit contacter chaque jour 30 clients parmi les acheteurs du téléviseur. On suppose que le nombre de clients est suffisamment important pour assimiler le choix des 30 clients à un tirage avec remise. On note X la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 30 clients, associe le nombre de clients satisfaits du service clientèle.

a. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

5a) Choisir au hasard un client et lui demander s'il est satisfait est une expérience aléatoire à deux issues :
succès : "le client est satisfait" de probabilité $p(S) = 0,8$
échec : "le client n'est pas satisfait".
C'est donc une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = 0,8$.

On répète 30 fois cette épreuve, de manière identique et indépendante, (car assimilé à un tirage avec remise)

X est la variable aléatoire qui compte le nombre de clients satisfaits, c'est à dire le nombre de succès).

X suit donc la loi binomiale de paramètre $n = 30$ et $p = 0,8$

$$\boxed{\begin{array}{l} X \sim \mathcal{B}(30 ; 0,8) \\ \text{et } \forall k \in \mathbb{N} \quad k \leq 30 \quad P(X=k) = \binom{30}{k} 0,8^{k} (1-0,8)^{30-k} \end{array}}$$

b. Déterminer la probabilité, arrondie à 10^{-3} près, qu'au moins 25 clients soient satisfaits dans un échantillon de 30 clients contactés sur une même journée.

b) on cherche $P(X \geq 25)$

$P(X \geq 25) = 1 - P(X < 25)$

$= 1 - P(X \leq 24)$

avec la calculatrice, on trouve

$\boxed{P(X \geq 25) \approx 0,428}$

6. En résolvant une inéquation, déterminer la taille minimale de l'échantillon de clients à contacter pour que la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux ne soit pas satisfait soit supérieure à 0,99.

6) on interroge maintenant n clients et le succès

Soit Y la variable aléatoire qui compte le nombre de personnes non satisfaites.

Y suit la loi binomiale de paramètre n et $p = 0,2$.

on cherche $P(Y \geq 1)$

$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y < 1)$

$= 1 - P(Y = 0)$.

$P(Y=0) = \binom{n}{0} 0,2^0 (1-0,2)^{n-0}$

$= 1 \times 1 \times 0,8^n$

$= 0,8^n$

$P(Y \geq 1) = 1 - 0,8^n$

on veut trouver n pour que $P(Y \geq 1) \geq 0,99$

on cherche n tel que $1 - 0,8^n \geq 0,99$

$-0,8^n \geq 0,99 - 1$

$-0,8^n \geq -0,01$

$0,8^n \leq 0,01$

$\ln(0,8^n) \leq \ln(0,01)$ car ln croissante

$n \ln(0,8) \leq \ln(0,01)$

$n \ln(0,8) \leqslant \ln(0,01)$

$n \geqslant \dfrac{\ln(0,01)}{\ln(0,8)}$ car $0,8 < 1$; $\ln(0,8) < 0$

or $\dfrac{\ln(0,01)}{\ln(0,8)} \approx 20,64$

donc $n \geqslant 21$

Il faut donc un échantillon de taille minimale égale à 21

7. Dans les deux questions **a.** et **b.** qui suivent, on ne s'intéresse qu'aux seuls achats sur internet.
Lorsqu'une commande de téléviseur est passée par un client, on considère que le temps de livraison du téléviseur est modélisé par une variable aléatoire T égale à la somme de deux variables aléatoires T_1 et T_2.

La variable aléatoire T_1 modélise le nombre entier de jours pour l'acheminement du téléviseur depuis un entrepôt de stockage vers une plateforme de distribution.
La variable aléatoire T_2 modélise le nombre entier de jours pour l'acheminement du téléviseur depuis cette plateforme jusqu'au domicile du client.

On admet que les variables aléatoires T_1 et T_2 sont indépendantes, et on donne :
- L'espérance $E(T_1) = 4$ et la variance $V(T_1) = 2$;
- L'espérance $E(T_2) = 3$ et la variance $V(T_2) = 1$.

a. Déterminer l'espérance $E(T)$ et la variance $V(T)$ de la variable aléatoire T.

7) $T = T_1 + T_2$

$E(T_1) = 4$ $V(T_1) = 2$ et $E(T_2) = 3$ $V(T_2) = 1$

a) $E(T) = E(T_1 + T_2)$
$= E(T_1) + E(T_2)$
$= 4 + 3$
$\boxed{E(T) = 7}$

$V(T) = V(T_1 + T_2)$
$= V(T_1) + V(T_2)$ car T_1 et T_2 sont indépendantes
$= 2 + 1$
$\boxed{V(T) = 3}$

b. Un client passe une commande de téléviseur sur internet. Justifier que la probabilité qu'il reçoive son téléviseur entre 5 et 9 jours après sa commande est supérieure ou égale à $\frac{2}{3}$.

b) on cherche $P(5 \leqslant T \leqslant 9)$

on a $5 \leqslant T \leqslant 9$

$\iff 5-7 \leqslant T - E(T) \leqslant 9-7$

$\iff -2 \leqslant T - E(T) \leqslant 2$

$\iff |T - E(T)| \leqslant 2$

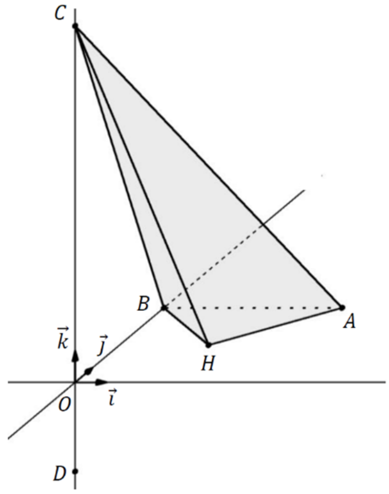
on utilise l'evenement contraire (car l'inégalité de Bienaymé Tchebychev) s'applique pour $P(|T-E(T)| \geqslant a)$

$$P(|T-E(T)| \leqslant 2) = 1 - P(|T-E(T)| > 2)$$
$$= 1 - P(|T-E(T)| \geqslant 3)$$

D'après l'inégalité de Bienaymé Tchebychev, on a

$$P(|T-E(T)| \geqslant 3) \leqslant \frac{V(T)}{3^2}$$
$$-P(|T-E(T)| \geqslant 3) \geqslant -\frac{3}{3^2}$$
$$1 - P(|T-E(T)| \geqslant 3) \geqslant 1 - \frac{1}{3}$$
$$1 - P(|T-E(T)| \geqslant 3) \geqslant \frac{2}{3}$$
$$P(|T-E(T)| \leqslant 2) \geqslant \frac{2}{3}$$
$$\boxed{P(5 \leqslant T \leqslant 9) \geqslant \frac{2}{3}}$$

Exercice 3 (5 points)



L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,,\vec{k})$.

On considère les points $A\,(5\,;\,5\,;\,0)$, $B\,(0\,;\,5\,;\,0\,)$, $C\,(0\,;\,0\,;\,10)$ et $D\left(0\,;\,0\,;\,-\frac{5}{2}\right)$.

1.

a. Montrer que $\vec{n_1}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (CAD).

1)a) $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont deux vecteurs du plan (CAD)

$\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}x_A-x_C\\y_A-y_C\\z_A-z_C\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}5-0\\5-0\\0-10\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}5\\5\\-10\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}0-0\\0-0\\-\frac{5}{2}-10\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}0\\0\\-\frac{25}{2}\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas colinéaires car $x_{\overrightarrow{CA}}=5\neq 0$

On calcule le produit scalaire de $\vec{n_1}$ avec ces deux vecteurs

$$\vec{n_1}\cdot\overrightarrow{CA} = 1\times 5-1\times 5+0\times(-10) = 5-5+0 = 0.$$

$$\vec{n_1}\cdot\overrightarrow{CD} = 1\times 0-1\times 0+0\times\left(-\frac{25}{2}\right) = 0+0+0 = 0.$$

donc $\vec{n_1}$ est orthogonal à $\overrightarrow{CA}$ et à $\overrightarrow{CD}$.

$\vec{n_1}$ étant orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan, il est normal au plan (CAD).

b. En déduire que le plan (CAD) a pour équation cartésienne : $x-y=0$.

b) Si un vecteur normal à un plan a pour coordonnées $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ alors l'équation cartésienne du plan est
$$ax+by+cz+d=0$$

Comme $\vec{n_1}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ (CAD) : $1x-1y+0z+d=0$

(CAD) : $x-y+d=0$

Pour trouver d, on utilise un point du plan.

$A(5,5,0)\in(CAD)$ donc $x_A-y_A+d=0$
$\iff 5-5+d=0$
$\iff d=0$

d'où $\boxed{(CAD) : x-y=0}$

2. On considère la droite $\mathcal{D}$ de représentation paramétrique $\begin{cases} x = \frac{5}{2}t \\ y = 5 - \frac{5}{2}t \\ z = 0 \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$.

a. On admet que la droite $\mathcal{D}$ et le plan (CAD) sont sécants en un point H. Justifier que les coordonnées de H sont $\left(\frac{5}{2}; \frac{5}{2}; 0\right)$.

2) $\mathcal{D} \begin{cases} x = \frac{5}{2}t \\ y = 5 - \frac{5}{2}t \\ z = 0 \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$.

a) $H \in \mathcal{D}$ donc $H\left(\frac{5}{2}t ; 5 - \frac{5}{2}t ; 0\right)$

$H \in (CAD)$ donc $x_H - y_H = 0$

d'où $\frac{5}{2}t - \left(5 - \frac{5}{2}t\right) = 0$

$\Leftrightarrow \frac{5}{2}t - 5 + \frac{5}{2}t = 0$

$\Leftrightarrow 5t - 5 = 0$

$\Leftrightarrow t = 1$

et donc $H\left(\frac{5}{2} \times 1 ; 5 - \frac{5}{2} \times 1 ; 0\right)$

$\boxed{H\left(\frac{5}{2} ; \frac{5}{2} ; 0\right)}$

b. Démontrer que le point H est le projeté orthogonal de B sur le plan (CAD).

b) On sait déjà que $H \in (CAD)$.
Il reste à montrer que (BH) est bien perpendiculaire à (CAD).

$\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix} \frac{5}{2} - 0 \\ \frac{5}{2} - 5 \\ 0 - 0 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (BH)

On a $\overrightarrow{BH} = \frac{5}{2}\overrightarrow{n_1}$

donc $\overrightarrow{BH}$ et $\overrightarrow{n_1}$ sont colinéaires

Comme $\overrightarrow{n_1}$ est un vecteur normal à (CAD), alors $\overrightarrow{BH}$ est également vecteur normal à (CAD)

et donc (BH) est bien perpendiculaire à (CAD)

et donc $\boxed{H \text{ est le projeté orthogonal de } B \text{ sur } (CAD)}$

3.

a. Démontrer que le triangle ABH est rectangle en H.

3a) Le point A appartient au plan (CAD), ainsi que le point H.

$\overrightarrow{BH}$ est un vecteur normal de (CAD). Donc il est orthogonal à tous les vecteurs du plan

Donc $\overrightarrow{BH}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont orthogonaux.

Donc $\boxed{\text{le triangle } ABH \text{ est rectangle en } H.}$

b. En déduire que l'aire du triangle ABH est égale à $\frac{25}{4}$.

b) L'aire d'un triangle est égale à la base multiplié par la hauteur divisé par 2

$$\mathcal{A}_{ABH} = \frac{AH \times BH}{2}$$

$\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad BH = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(-\frac{5}{2}\right)^2 + 0^2}$

$= \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{25}{4}}$

$BH = \frac{5}{2}\sqrt{2}.$

$\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix} \frac{5}{2} - 5 \\ \frac{5}{2} - 5 \\ 0 - 0 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{AH}\begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad AH = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(-\frac{5}{2}\right)^2 + 0^2}$

$AH = \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{25}{4}}$

$AH = \frac{5}{2}\sqrt{2}$

donc $\mathcal{A}_{ABH} = \dfrac{\frac{5}{2}\sqrt{2} \times \frac{5}{2}\sqrt{2}}{2}$

$= \frac{25}{4} \times \frac{2}{2}$

$\boxed{\mathcal{A}_{ABH} = \frac{25}{4}}$

4.

a. Démontrer que (CO) est la hauteur du tétraèdre $ABCH$ issue de C.

4a) $A\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ $B\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ $H\begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ donc A, B et H sont dans le plan d'équation $z = 0$, plan défini par les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ et le point O.

$\overrightarrow{OC} = 10\vec{k}$ donc $\overrightarrow{OC}$ est colinéaire à $\vec{k}$

Or $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère orthonormé, ce qui veut dire que $\vec{k}$ est orthogonal à $\vec{i}$ et à $\vec{j}$

donc $\overrightarrow{OC}$ est un vecteur normal au plan (ABH)

et donc O est le projeté orthogonal de C sur (ABH)

$\boxed{\text{(CO) est donc bien la hauteur du tétraèdre ABCH issue de C}}$

b. En déduire le volume du tétraèdre $ABCH$.
On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par : $V = \frac{1}{3}\mathcal{B}h$ *où* $\mathcal{B}$ *est l'aire d'une base et* h *la hauteur relative à cette base.*

b) On a déjà l'aire de la base du tétraèdre.
Il reste à calculer la hauteur

$\overrightarrow{OC}\begin{pmatrix}0\\0\\10\end{pmatrix}$ $OC = 10$.

d'où

$$V_{ABCH} = \frac{\mathcal{A}_{ABH} \times OC}{3}$$
$$= \frac{25}{4} \times 10 \times \frac{1}{3}$$
$$\boxed{V_{ABCH} = \frac{125}{6}}$$

5. On admet que le triangle ABC est rectangle en B. Déduire des questions précédentes la distance du point H au plan (ABC).

5) On peut calculer le volume de ABCH en prenant comme base ABC. La hauteur correspond alors à la distance entre le point H et le plan (ABC) que je note d

$V = \dfrac{\mathcal{A}_{ABC} \times d}{3}$ et $V = \dfrac{125}{6}$ d'après la question 4b).

$\mathcal{A}_{ABC} = \dfrac{AB \times BC}{2}$ car ABC est un triangle rectangle en B

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0-5\\5-5\\0-0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-5\\0\\0\end{pmatrix}$ $AB = 5$

$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}0-0\\0-5\\10-0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}0\\-5\\10\end{pmatrix}$ $BC = \sqrt{(-5)^2+10^2}$
$= \sqrt{25+100}$
$= \sqrt{125}$
$= 5\sqrt{5}$

donc

$$\frac{125}{6} = \frac{\frac{5 \times 5\sqrt{5}}{2} \times d}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{125}{6} = \frac{25\sqrt{5}\,d}{6}$$

$$\Leftrightarrow \frac{125}{25\sqrt{5}} = d$$

$$\Leftrightarrow d = \frac{5}{\sqrt{5}}$$

$$\Leftrightarrow d = \frac{5\sqrt{5}}{5}$$

$$\Leftrightarrow d = \sqrt{5}$$

donc $\boxed{\text{la distance entre le point H et le plan (ABC) est égale à } \sqrt{5}}$

Exercice 4 (6 points)

Partie A : étude de la fonction f.

La fonction f est définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $f(x)=x-2+\frac{1}{2}\ln x$, où ln désigne la fonction logarithme népérien. On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$, on note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.

1.

a. Déterminer, en justifiant, les limites de f en 0 et en $+\infty$.

$I=]0;+\infty[\qquad f(x)=x-2+\frac{1}{2}\ln(x)$

Partie A

1a) en 0 $\quad \lim\limits_{x\to 0}(x-2)=-2$

$\lim\limits_{x\to 0}\ln(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ $\Big\}$ par produit $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2}\ln(x)=-\infty$

par somme $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}f(x)=-\infty}$

en $+\infty$ $\quad \lim\limits_{x\to+\infty}(x-2)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2}\ln(x)=+\infty$ $\Big\}$ par somme $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty}$

b. Montrer que pour tout x appartenant à $]0\,;\,+\infty[$, on a : $f'(x)=\frac{2x+1}{2x}$.

b) $\forall x\in I \quad f'(x)=1-0+\frac{1}{2}\times\frac{1}{x}$

$=1+\frac{1}{2x}$

$\boxed{f'(x)=\frac{2x+1}{2x}}$

c. Étudier le sens de variation de f sur $]0\,;\,+\infty[$.

c) Sur $]0;+\infty[$ $\quad 2x+1>0$ et $2x>0$ donc $f'(x)>0$

donc $\boxed{\text{sur }]0;+\infty[\ f \text{ est strictement croissante}}$

d. Étudier la convexité de f sur $]0\,;\,+\infty[$.

d) $f'(x)=1+\frac{1}{2x}$

$f'(x)=1+\frac{1}{2}\times\frac{1}{x}$

$f''(x)=0+\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{x^2}\right)$

$f''(x)=-\frac{1}{2x^2}$

$\boxed{\forall x\in]0;+\infty[\quad f''(x)<0 \text{ donc } f \text{ est concave sur }]0;+\infty[}$

2.

a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $]0; +\infty[$ une solution unique qu'on notera α et justifier que α appartient à l'intervalle $[1 ; 2]$.

2 a) Dressons le tableau de variation de f.

x	0		$+\infty$
f	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

- f est définie, dérivable donc continue, et strictement croissante sur $]0; +\infty[$.
- $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $0 \in]-\infty; +\infty[$

Donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α sur $]0; +\infty[$.

De plus $f(1) = 1 - 2 + \frac{1}{2}\ln(1)$

$= 1 - 2 + 0$

$f(1) = -1 < 0$

et $f(2) = 2 - 2 + \frac{1}{2}\ln(2)$

$f(2) = \frac{1}{2}\ln(2) > 0$

donc $0 \in [f(1); f(2)]$ et donc $\boxed{\alpha \in [1; 2].}$

b. Déterminer le signe de $f(x)$ pour $x \in]0 ; +\infty[$.

b) f étant croissante et s'annulant en α, on a

$\boxed{f(x) < 0 \text{ sur }]0; \alpha[\text{ et } f(x) > 0 \text{ sur }]\alpha; +\infty[\text{ et } f(\alpha) = 0}$

c. Montrer que $\ln(\alpha) = 2(2 - \alpha)$.

c) on a $f(\alpha) = 0$

donc $\alpha - 2 + \frac{1}{2}\ln(\alpha) = 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln(\alpha) = 2 - \alpha$

$\Leftrightarrow \boxed{\ln(\alpha) = 2(2 - \alpha)}$

Partie B : étude de la fonction g.

La fonction g est définie sur $]0\,;1]$ par $g(x) = -\frac{7}{8}x^2 + x - \frac{1}{4}x^2 \ln x$.

On admet que la fonction g est dérivable sur $]0\,;1]$ et on note g' sa fonction dérivée.

1. Calculer $g'(x)$ pour $x \in]0\,;1]$ puis vérifier que $g'(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right)$.

Partie B

Sur $]0;1]$ $\quad g(x) = -\frac{7}{8}x^2 + x - \frac{1}{4}x^2 \ln(x)$

1) g est de la forme $w - u \times v$ avec

$w(x) = -\frac{7}{8}x^2 + x \qquad u(x) = \frac{1}{4}x^2 \qquad v(x) = \ln(x)$

$w'(x) = -\frac{7}{4}x + 1 \qquad u'(x) = \frac{1}{2}x \qquad v'(x) = \frac{1}{x}$

$$\forall x \in]0;1] \quad g'(x) = w'(x) - u'(x)v(x) - u(x)v'(x)$$
$$= -\frac{7}{4}x + 1 - \frac{1}{2}x\ln(x) - \frac{1}{4}x^2 \times \frac{1}{x}$$
$$= -\frac{7}{4}x + 1 - \frac{1}{2}x\ln(x) - \frac{1}{4}x$$
$$= -\frac{8}{4}x + 1 - \frac{1}{2}x\ln(x)$$
$$g'(x) = -2x + 1 - \frac{1}{2}x\ln(x)$$

Calculons $x f\left(\frac{1}{x}\right)$

$$\forall x \in]0;1],\ x f\left(\frac{1}{x}\right) = x\left(\frac{1}{x} - 2 + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$
$$= 1 - 2x + \frac{1}{2}x(-\ln(x))$$
$$= 1 - 2x - \frac{1}{2}x\ln(x).$$
$$= -2x + 1 - \frac{1}{2}x\ln(x)$$
$$= g'(x)$$

donc $\boxed{\forall x \in]0;1] \quad g'(x) = x f\left(\frac{1}{x}\right)}$

2.

a. Justifier que pour x appartenant à l'intervalle $\left]0\,;\frac{1}{\alpha}\right[$, on a $f\left(\frac{1}{x}\right) > 0$.

2 a) $\forall x \in]0; \frac{1}{\alpha}[$, $\frac{1}{x} \in]\alpha; +\infty[$ et d'après 2b)

f est positive sur $]\alpha; +\infty[$

donc $\boxed{\forall x \in]0; \frac{1}{\alpha}[\quad f\left(\frac{1}{x}\right) > 0}$

b. On admet le tableau de signes suivant :

x	0		$\frac{1}{\alpha}$		1
Signe de $f\left(\frac{1}{x}\right)$		+	0	−	

En déduire le tableau de variations de g sur l'intervalle $]0\,;1]$.
Les images et les limites ne sont pas demandées.

b) $\forall x \in\,]0;1] \quad g'(x) = x\, f\left(\frac{1}{x}\right)$.

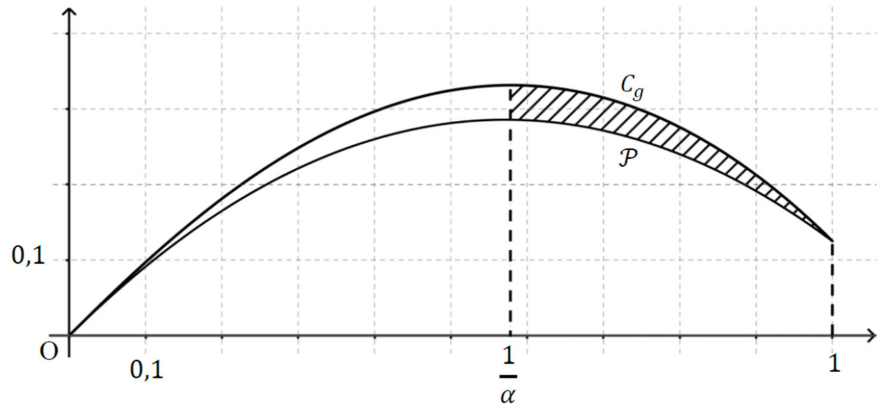
$\forall x \in\,]0;1] \quad x > 0$ donc $g'(x)$ est du signe de $f\left(\frac{1}{x}\right)$

x	0		$\frac{1}{\alpha}$		1
signe de $f\left(\frac{1}{x}\right)$		+	0	−	
signe de $g'(x)$		+	0	−	
variation de f		$\nearrow$		$\searrow$	

Partie C : un calcul d'aire.

On a représenté sur le graphique ci-dessous :

- La courbe $\mathcal{C}_g$ de la fonction g ;
- La parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = -\frac{7}{8}x^2 + x$ sur l'intervalle $]0\,;1]$.



On souhaite calculer l'aire $\mathcal{A}$ du domaine hachuré compris entre les courbes $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{P}$, et les droites d'équations $x = \frac{1}{\alpha}$ et $x = 1$.
On rappelle que $\ln(\alpha) = 2(2-\alpha)$.

1.

a. Justifier la position relative des courbes C_g et $\mathcal{P}$ sur l'intervalle $]0\,;1]$.

Partie C

1a) Pour trouver la position relative de $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{P}$, on étudie le signe de $g(x) - \left(-\frac{7}{8}x^2 + x\right)$

Soit la fonction h définie sur $]0;1]$ par

$$h(x) = g(x) - \left(-\frac{7}{8}x^2 + x\right)$$

$$h(x) = -\frac{7}{8}x^2 + x - \frac{1}{4}x^2\ln(x) + \frac{7}{8}x^2 - x$$

$$h(x) = -\frac{1}{4}x^2\ln(x)$$

Sur $]0;1]$ $-\frac{1}{4}x^2 < 0$ $\ln(x) \leq 0$

donc par produit $h(x) \geq 0$.

donc $\forall x \in]0;1]$ $g(x) \geqslant -\frac{7}{8}x^2 + x$

et donc $\boxed{\forall x \in]0;1] \quad \mathcal{C}_g \text{ est au dessus de } \mathcal{P}}$

b. Démontrer l'égalité :

$$\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} x^2 \ln x \, dx = \frac{-\alpha^3 - 6\alpha + 13}{9\alpha^3}.$$

b) Soit $I = \displaystyle\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} x^2 \ln(x)\,dx$.

on pose $u(x) = \ln(x)$ et $v'(x) = x^2$

$u'(x) = \frac{1}{x}$ $v(x) = \frac{x^3}{3}$

u et v sont définies, continues et dérivables sur $\left[\frac{1}{\alpha};\alpha\right]$

par intégration par partie, on a

$$I = \left[\ln(x) \times \frac{x^3}{3}\right]_{\frac{1}{\alpha}}^{1} - \int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} \frac{1}{x} \times \frac{x^3}{3}\,dx$$

$$= \ln(1) \times \frac{1^3}{3} - \ln\left(\frac{1}{\alpha}\right) \times \left(\frac{1}{\alpha}\right)^3 \times \frac{1}{3} - \int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} \frac{x^2}{3}\,dx$$

$$= 0 + \frac{\ln(\alpha)}{3\alpha^3} - \left[\frac{x^3}{9}\right]_{\frac{1}{\alpha}}^{1}$$

$$= \frac{\ln(\alpha)}{3\alpha^3} - \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{9\alpha^3}\right) \qquad \text{or } \ln(\alpha) = 2(2-\alpha)$$

$$= \frac{2(2-\alpha)}{3\alpha^3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9\alpha^3}$$

$$= \frac{3 \times 2(2-\alpha) - \alpha^3 + 1}{9\alpha^3}$$

$$= \frac{12 - 6\alpha - \alpha^3 + 1}{9\alpha^3}$$

$$I = \frac{-\alpha^3 - 6\alpha + 13}{9\alpha^3}$$

donc $\boxed{\displaystyle\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} x^2\ln(x)\,dx = \frac{-\alpha^3 - 6\alpha + 13}{9\alpha^3}}$

2. En déduire l'expression en fonction de α de l'aire $\mathcal{A}$.

2) On sait que $\mathcal{C}_g$ est au dessus de $\mathcal{P}$

donc $\mathcal{A} = \int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} h(x)\,dx$ avec $h(x) = g(x) - \left(-\frac{7}{8}x^2 + x\right)$

comme si l'ai défini à la question 1a) de la partie C.

or $h(x) = -\frac{1}{4}x^2\ln(x)$

donc $\mathcal{A} = \int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} -\frac{1}{4}x^2\ln(x)\,dx$

$= -\frac{1}{4}\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} x^2\ln(x)\,dx$

$= -\frac{1}{4}\left(\frac{-\alpha^3 - 6\alpha + 13}{9\alpha^3}\right)$

$$\boxed{\mathcal{A} = \frac{\alpha^3 + 6\alpha - 13}{36\alpha^3}}$$